به نام خدا

سایت گروه آموزشی آلم

ابتدایی، راهنمایی، دبیرستان، کنکور و دانشگاه

www.g-alm.ir	
www.g-alm.ir/ac	دانشگاه
www.g-alm.ir/forum	انجمن
www.g-alm.ir/azmoon	آزمون های آلم
www.g-alm.ir/shop	فروشگاه
www.film.g-alm.ir	فیلم های آموزشی

حل تشریحی سوالات:

۱) گزینه ب

جمع ریشه ها: $S=-\frac{b}{a}=-\frac{2}{2}=-1 \longrightarrow \alpha+\beta=-1 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+1=-\beta\\ \beta+1=-\alpha\end{cases}$

$$\frac{\alpha^5}{(\beta+1)^5}+\frac{\beta^7}{(\alpha+1)^7}=\frac{\alpha^5}{(-\alpha)^5}+\frac{\beta^7}{(-\beta)^7}=-1-1=-2$$

۲) گزینه ج

با فاکتورگیری مناسب داریم:

$$6+66+666+\dots+\underbrace{666\dots666}_{n}=\frac{6}{9}\Big(9+99+\dots+\underbrace{999\dots999}_{n}\Big)$$

$$=\frac{6}{9}\left(10-1+10^2-1+\dots+10^n-1\right)=\frac{6}{9}\Big(\underbrace{10+10^2+\dots+10^n}_{\text{دنباله هندسی}}-n\Big)=\frac{6}{9}\left(\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n\right)$$

$$=\frac{6}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$$

۳) یادآوری از نامساوی مثلث:

$$|a|+|b|\geq|a+b| \Rightarrow \begin{cases}a,b \text{ هم علامت} \Rightarrow |a|+|b|=|a+b|\\ a,b \text{ مختلف العلامه} \Rightarrow |a|+|b|>|a+b|\end{cases}$$

یادآوری از ویژگی های قدر مطلق:

$$|u|=|-u|$$

در این سوال ابتدا باید فرم نامساوی مثلث را پیدا کنیم و سپس از خاصیت آن نامساوی استفاده کنیم:

$$|\sin x-\cos x|<|\sin x|+|\cos x| \xrightarrow{|\cos x|=|-\cos x|} \underbrace{|\sin x-\cos x|}_{a+b}<\underbrace{|\sin x|}_{a}+\underbrace{|-\cos x|}_{b}$$

$$\xrightarrow[ab<0]{a,b \text{ مختلف العلامه اند}} (\sin x)(-\cos x)<0 \Rightarrow \sin x\cos x>0 \longrightarrow$$ x در ربع اول یا سوم قرار دارد

گزینه الف

۴) گزینه ج

$$|5x+2|=[x+3]+[-x] \Rightarrow |5x+2|=[x]+[-x]+3$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z} & |5x+2|=0+3 \longrightarrow \begin{cases}5x+2=3 \longrightarrow x=\frac{1}{5} & \text{غ ق ق}\\ 5x+2=-3 \longrightarrow x=-1 & \text{ق ق}\end{cases}\\ x\notin\mathbb{Z} & |5x+2|=-1+3 \longrightarrow \begin{cases}5x+2=2 \longrightarrow x=0 & \text{غ ق ق}\\ 5x+2=-2 \longrightarrow x=-\frac{4}{5} & \text{ق ق}\end{cases}\end{cases}$$

۵- گزینه د
مهران

$$3^{\log x} + x^{\log 3} = 2\times 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 3^{\log x} + 3^{\log x} = 2\times 3^{\frac{5}{2}}$$

$$\cancel{2}\times 3^{\log x} = \cancel{2}\times 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \log x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{5}{2}}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

۶-

$$f(x) = -x^3 \quad ; \quad f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \cancel{-}x^3 = \cancel{-}\sqrt[3]{x} \xRightarrow{\sqrt[3]{x}=t} t^9 = t \Rightarrow t(t^8-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=0 & t=0 \rightarrow x=0 \\ t^8=1 \rightarrow \begin{cases} t=1 & \rightarrow x=1 \\ t=-1 & \rightarrow x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

درس تکاملی

گزینه ج

۷-

$$\sqrt{2x+1} = x-1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 2x+\cancel{1} = x^2-2x+\cancel{1} \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \text{ غ ق ق}$$

$$x=4 \text{ ق ق } ✓$$

شرط دامنه

$$2x+1\geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \xrightarrow{\cap} x\geq 1$$

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x\geq 1$$

گزینه د

۸-

$$\frac{|x+2|(4-x)}{(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \ominus \quad (-2) \quad \ominus \quad 2 \quad \oplus \quad (4) \quad \ominus$$

مضاعف — ساده — ساده
جواب — جواب

گزینه الف

مجموعه جواب: $\{-2\} \cup (2,4] \xrightarrow{x\in Z} -2, 3, 4 \rightarrow$ مجموع مقادیر $=5$

۹-

گزینه ج

$$B = A^{-1} \xRightarrow{\det(A)=6-4=2} \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مج} = 4.5$$

۱۰- یادآوری:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow \cos(3x-x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos 2x = \frac{\sin 2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3}+k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}}$$

$$\xrightarrow{x\in[0,\pi]} x = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \longrightarrow \text{مجموع} = \frac{5\pi}{6}$$

گزینه الف

۱۱-

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0^-}\frac{-2f'(1-2h)-0}{1}=-2f'(1^+)$$

تذکر: اگر تابع پیوستگی راست نداشت، جواب تست گزینه ۴ بود.

$f'(1^+)$ نیازمند پیوستگی راست است

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=5\\ f(1)=5\end{array}\right\}\Rightarrow$$ پیوستگی راست است

$$f'(x)=\begin{cases}2x+4 & ; x\geq 1\\ 2 & ; x<1\end{cases}\longrightarrow -2f'(1^+)=-2(6)=-12$$

۱۲-

گزینه ب

محل تلاقی با y: $x=0,\ \sqrt{y}=xe^x+y-2\Rightarrow \sqrt{y}=y-2\rightarrow \underline{y=4}$

$$\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}}\frac{y'}{2\sqrt{y}}=y'+e^x+e^x x\xrightarrow{\begin{vmatrix}x=0\\ y=4\end{vmatrix}} y'=-\frac{4}{3}$$

معادله خط $\quad y-4=-\frac{4}{3}(x-0)\longrightarrow 3y+4x=12$

۱۳- ریشه مخرج مجانب قائم تابع است و خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج معادله مجانب مایل است.

قائم: $x=\frac{a}{2}$

مایل

$$\begin{array}{l|l}2x^2+bx+3 & 2x-a\\ \hline -\cancel{2x^2}+ax & x+\frac{(b+a)}{2}\\ (b+a)x+3 & \end{array}$$

مایل: $y=x+\frac{b+a}{2}$

محل تلاقی $\begin{vmatrix}\frac{a}{2}\\ \frac{a}{2}+\frac{b+a}{2}\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{مقایسه}}\begin{vmatrix}3\\ -2\end{vmatrix}\qquad \begin{cases}a=6\\ b=-16\end{cases}\longrightarrow a+b=-10$

گزینه د

۱۴- روش اول: استفاده از مشتق برای محاسبه طول اکسترمم و سپس جایگذاری x بدست آمده در تابع و بدست آوردن y

روش دوم: می‌دانیم:

نقطه اکسترمم در تابع درجه ۲ $\begin{vmatrix}-\frac{b}{2a}\\ -\frac{\Delta}{4a}\end{vmatrix}$

طبق سوال: $-\frac{\Delta}{4a}=2\Rightarrow -\frac{16-4(1)(m-3)}{4(m-3)}=2\Rightarrow 16-4m+12=-8m+24$

$$\Rightarrow 4m=-4\Rightarrow m=-1$$

۱۵- گزینه د

$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ \to 120^\circ = \frac{f_1}{60} \times 360^\circ \to f_1 = 20$

$\to f_1 + f_3 = 32$

$\frac{f_i}{n} \times 100 = 20\% \to \frac{f_3}{60} = 0.2 \to f_3 = 12$

$\Rightarrow f_2 + f_4 = 60 - 32 = \underline{28}$

$\begin{cases} \frac{f_2}{f_4} = \frac{3}{4} \\ f_2 + f_4 = 28 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{matrix} f_2 = 12 \to \alpha = 72^\circ \\ f_4 = 16 \end{matrix}$

۱۶-

$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \xrightarrow{C.V. = 0} \underline{\sigma = 0} \longrightarrow$ هرگاه انحراف معیار برابر صفر باشد، یعنی همه داده‌ها باهم برابر هستند.

$x_1 = 243,\ x_2 = 81,\ x_3 = 27,\ x_4 = 9,\ x_5 = 3$

$\bar{x} = \frac{243 + 81 + 27 + 9 + 3 + 3}{6} = 61$

۱۷- گزینه ب صحیح است.

$\text{کل حالات} = 6!$ حالات مطلوب: ○ d ○ e ○ f ○

حروف a، b، c باید در یکی از جاهای خالی قرار بگیرند. البته جایگشت a,b,c باهم و جایگشت d,e,f باهم را باید در نظر بگیریم.

$\underbrace{\binom{4}{3}}_{\substack{\text{۴ مکان خالی} \\ \text{۳ مکان}}} \times \underbrace{3!}_{\text{جایگشت } a,b,c} \times \underbrace{3!}_{\text{جایگشت } d,e,f} = \text{حالات مطلوب}$

$P = \frac{\text{حالت مطلوب}}{\text{کل حالات}} = \frac{1}{5} = 0.2$

۱۸-

$P(\text{درست}) = \frac{1}{4}$ $P(\text{غلط}) = \frac{3}{4}$

$P(K) = \binom{5}{K}\left(\frac{1}{4}\right)^K \left(\frac{3}{4}\right)^{5-K} = \binom{5}{K} \times \frac{3^{5-K}}{4^5}$ گزینه ۱

$P(0) = \frac{243}{4^5}$ $P(1) = \frac{405}{4^5}$ $P(2) = \frac{270}{4^5}$

$P(3) = \frac{90}{4^5}$ $P(4) = \frac{15}{4^5}$ $P(5) = \frac{1}{4^5}$

۱۹ - فرمول‌های زیر را برای هم‌ارزی‌های مثلثاتی به خاطر بسپارید :

مرتبه اول $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$ $\qquad$ $\sin^m u \underset{u\to0}{\sim} u^m$

مرتبه دوم $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u-\frac{u^3}{6}$ $\qquad$ $\sin^m u \underset{u\to0}{\sim} u^m - m\frac{u^{m+2}}{6}$

مرتبه اول $\cos u \underset{u\to0}{\sim} 1$ $\qquad$ $\cos^m u \underset{u\to0}{\sim} 1$

مرتبه دوم $\cos u \underset{u\to0}{\sim} 1-\frac{u^2}{2}$ $\qquad$ $\cos^m u \underset{u\to0}{\sim} 1-\frac{mu^2}{2}$

مرتبه اول $\tan u \underset{u\to0}{\sim} u$ $\qquad$ $\tan^m u \underset{u\to0}{\sim} u^m$

مرتبه دوم $\tan u \underset{u\to0}{\sim} u+\frac{u^3}{3}$ $\qquad$ $\tan^m u \underset{u\to0}{\sim} u^m + \frac{mu^{m+2}}{3}$

حل سؤالات چند با هم ارزی راحت‌تر است :

$$\lim_{x\to0}\frac{x\left(2x-\frac{8x^3}{6}\right)\left(1-\frac{9x^2}{2}\right)-\left((4x)^2+2\frac{(4x)^4}{3}\right)}{x^2 . x . x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\left[\left(2-\frac{8x^2}{6}\right)\left(1-\frac{9x^2}{2}\right)-\left(16+\frac{2}{3}\times4^4x^2\right)\right]}{x^4\, x^2}=\lim_{x\to0^{\pm}}\frac{2-16}{x^2}=-\infty$$

۲۰- کافی است طرفین رابطه را به توان ۲ برسانیم : گزینه د

$$\sin 2x+\cos 2x=\frac14 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 2x+\cos^2 2x+2\sin 2x\cos 2x=\frac1{16}$$

$$\Rightarrow 1+\sin 4x=\frac1{16}\to \sin 4x=-\frac{15}{16} \quad,\quad 1+\cot^2 4x=\frac{1}{\sin^2 4x}$$

$$\Rightarrow 1+\cot^2 4x=\frac{1}{\frac{225}{256}}\to \cot^2 4x=\frac{31}{225}\to \tan^2 4x=\frac{225}{31}\Rightarrow \tan 4x=\pm\frac{15}{\sqrt{31}}$$

-۲۱

شرط وجود پیوستگی $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)\Rightarrow \lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{|x-3|}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{-x+3}=\frac00$ گزینه د

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to3}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}-0}{-1}=-\frac1{12} \qquad 2m=-\frac1{12}\Rightarrow m=-\frac1{24}$$

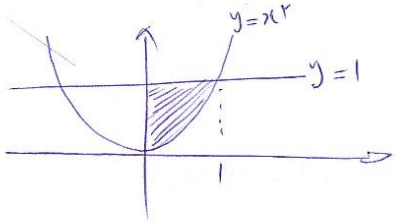
-۲۲

$$\left(\frac{2}{f^3(x)}\right)' = \frac{0 - 3f'(x)\,f^2(x)\,(2)}{f^6(x)} \xrightarrow{x=1} \frac{-6f'(1)\,f^2(1)}{f^6(1)} = \frac{-6\times(-6)}{3^4}$$

$$= \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$$

گزینه ب

-۲۳



$$\int_0^1 (1-x^2)\,dx = x-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

گزینه ب

-۲۴

$$\int_{-3}^{0} (-x^2)\,dx + \int_0^1 x^2\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big]_{-3}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big]_0^1$$

$$= 0-(9) + \frac{1}{3} - 0 = -\frac{26}{3}$$

-۲۵ اگر نقطه $M\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ نقطه‌ای از مکان هندسی باشد، معادله به صورت $y=mx+h$ می‌باشد، با فرض $h=\beta-m\alpha$

معادله خط را با معادله بیضی قطع می‌دهیم و همین معادله را برابر صفر قرار می‌دهیم تا m بدست آید و چون دو تا خط عمود هستند بایست حاصلضرب شیب‌ها برابر ۱- باشد.

$$\left.\begin{array}{l} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ y=mx+h \end{array}\right\} \Rightarrow (b^2+m^2a^2)x^2+2mha^2x+a^2(h^2-b^2)=0 \xrightarrow{\Delta=0}$$

$$m^2h^2a^2+(b^2-h^2)(b^2+m^2a^2)=0 \Rightarrow a^2m^2+b^2=h^2 \Rightarrow$$

$$a^2m^2+b^2-(\beta-m\alpha)^2=0 \Rightarrow (\alpha^2-a^2)m^2-2\alpha\beta m+\beta^2-b^2=0$$

$$\Rightarrow m'.m''=-1 \Rightarrow \frac{\beta^2-b^2}{\alpha^2-a^2}=-1 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=a^2+b^2 \rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2}$$

گزینه ب

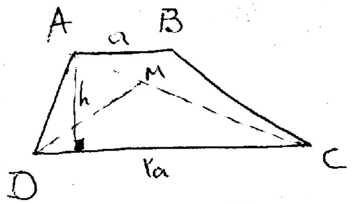
-۲۶ گزینه ج

$O\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} \quad R=\frac{1}{2}\sqrt{4+4-0}=\sqrt{2} \qquad OO'=\sqrt{2}$

$\Rightarrow OO'=|R-R'|$

$O'\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \quad R'=2\sqrt{2} \qquad |R-R'|=\sqrt{2}$

مماس داخل



$$MC = ۲AM \Rightarrow AM = \frac{1}{۳} AC$$

h' : عمودی است که از D بر قطر AC قابل رسم است:

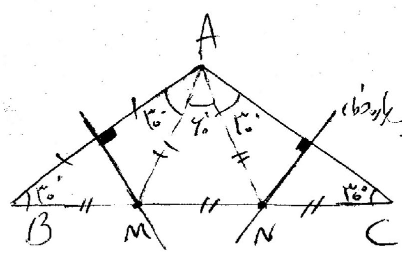
$$\frac{S_{DAM}}{S_{DAC}} = \frac{\frac{1}{۲} \cdot h' \cdot AM}{\frac{1}{۲} \cdot h' \cdot AC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{۳}$$

$$\Rightarrow S_{DAM} = \frac{1}{۳} S_{DAC}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{DAC} = \frac{1}{۲} \cdot h \cdot ۲a = ha \\ S_{ABCD} = \frac{h}{۲}(a + ۲a) = \frac{۳ha}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{DAC} = \frac{۲}{۳} S_{ABCD}$$

واز طرفی $S_{DAM} = \frac{1}{۳} S_{DAC} \Rightarrow S_{DAM} = \frac{1}{۳} \cdot \frac{۲}{۳} S_{ABCD} = \frac{۲}{۹} S_{ABCD}$

۲۸-



ویژگی عمودمنصف این است که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از ۲ سر آن پاره‌خط به یک فاصله است

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰°, \quad \hat{A} = ۴\hat{B}, \quad \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = ۱۲۰°, \quad \hat{B} = \hat{C} = ۳۰°$$

$$\left.\begin{array}{l} AM = BM \Rightarrow M\hat{A}B = \hat{B} = ۳۰° \\ AN = CN \Rightarrow N\hat{A}C = \hat{C} = ۳۰° \end{array}\right. \Rightarrow M\hat{A}N = ۶۰°$$

پس داریم $BM = AM = AN = NC = MN$

در نتیجه: $BM = MN = NC = \frac{BC}{۳} = ۸ \Rightarrow BN = BM + MN = ۱۶$

۲۹-

$\overset{\triangle}{AMB} : \hat{M}=90^\circ \Rightarrow AM^2+MB^2=AB^2$

$AB^2=(AP+PM)^2+MB^2=AP^2+2AP\times PM+PM^2+MB^2$

$=AP^2+2AP\times PM+PB^2=AP^2+2PB\times PN+PB^2$

$(AM-PM)^2+2PB(BN-PB)+PB^2=AM^2+PM^2-2AM.PM+2PB.BN-2PB^2+BP^2$

$\xrightarrow{PM^2-BP^2=-MB^2} AM^2-MB^2-2AM.PM+2BP.BN \xrightarrow{PM=AM-AP} AM^2-MB^2-2AM(AM-AP)+2BP.BN$

$\therefore$

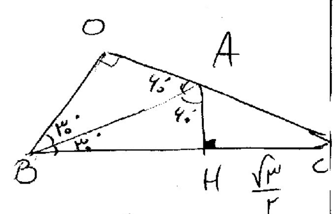
$AM^2-MB^2-2AM^2+2AM.AP+2BP.BN=-AM^2-MB^2+2AM.AP+2BP.BN$

$\Rightarrow AB^2=-AB^2+2AM.AP+2BP.BN \Rightarrow AB^2=AM.AP+BP.BN=6^2=36$

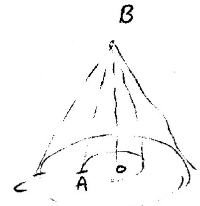
۳۰- مثلث ABC را که در آن $\hat{A}=120^\circ$, $AB=AC$, $BC=\sqrt{3}$ ، در نظر بگیرید.

داریم:

$ABH : \cos 30^\circ=\frac{BH}{AB} \Rightarrow AB=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1 \Rightarrow AH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$



$\overset{\triangle}{ABH} \cong \overset{\triangle}{ABO} \Rightarrow OB=\frac{\sqrt{3}}{2} , AO=\frac{1}{2}$



$V=\frac{1}{3}\pi OC^2 OB-\frac{1}{3}\pi OA^2.OB$

$=\frac{1}{3}\pi OB(OC^2-OA^2)$

$=\frac{1}{3}\pi.\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$